Physique avancée II – Examen Juin 2017 – Prof. J-Ph. Ansermet

Juin 2017 - 12h15-15h15

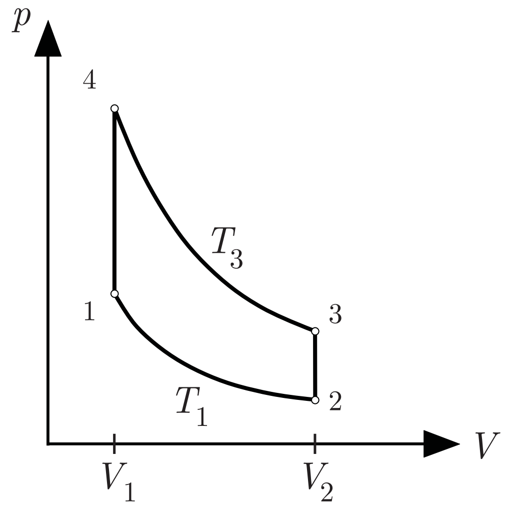
Nom : | | | | | | | | | | | | | | | |

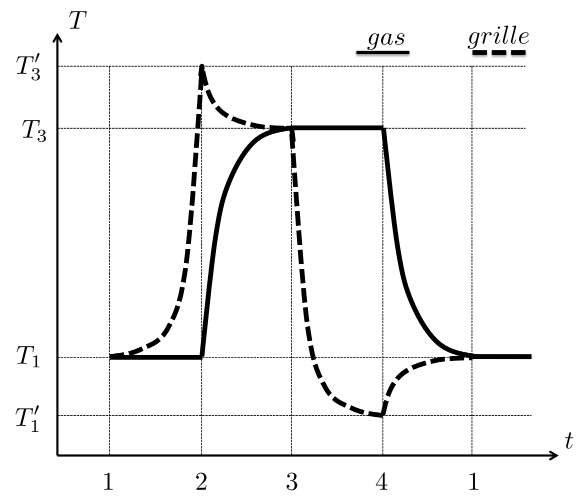
Prénom : | | | | | | | | | | | | | | | |

N° Sciper : | | | | | | |

A. Cycle calorifique de Stirling avec régénérateur (4/10 points)

On considère un gaz parfait, constitué de N moles d'une seule substance, qui subit le cycle thermodynamique de Stirling, décrit sur la figure à gauche. On fera l'hypothèse que durant tous les processus, let taux de production interne d'entropie est négligeable. Les processus de 1 à 2 et de 3 à 4 sont isothermes. Ils ont lieu aux températures T_3 et T_1. Les processus de 2 à 3 et de 4 à 1 sont isochores, aux volumes V_1 et V_2.





Le gaz est caractérisé par les équations d'état :

$$pV = NRT \qquad U = cNRT$$

Dans les dernières questions du problème, on va considérer que le gaz passe à travers une grille dont la chaleur spécifique est $C_{solide} = 3N_sR$, où N_s est le nombre de mole de la substance en laquelle la grille est faite. La température de cette grille et celle du gaz évoluent comme indiqué sur la figure de droite. Notez comme la grille est chauffée jusqu'à une température T_3' pendant que le gaz est en contact avec la source froide à la température T_1, et la grille est refroidie jusqu'à une température T_1' pendant que le gaz est en contact avec la source chaude pendant le processus 3-4. Pendant les processus 2-3, le gaz passe à travers la grille, ce qui provoque son échauffement et la grille refroidit. La machine est conçue pour que dans l'intervalle de temps que dure le processus 2-3, la grille et le gaz atteignent une température commune. De façon analogue, pendant le processus 4-1, le gaz se refroidit en passant à travers la grille, qui se réchauffe un peu. Les valeurs V_1, V_2, T_1, T_3 sont supposées connues.

Questions et réponses au verso !

1. (**0.5 point**) Calculer le travail W_{cycle} effectué sur le système durant un cycle.

   $W_{cycle} =$

2. (**0.5 point**) Calculer le transfert thermique Q_{12} effectué pendant l'isotherme à T_1.

   $Q_{12} =$

3. (**0.5 point**) Calculer le changement d'entropie ΔS_{12} du gaz pendant l'isotherme à T_1.

   $\Delta S_{12} =$

4. (**0.5 point**) Montrer que $Q_{23} = -Q_{41}$.

   ....

5. (**1.0 point**) Si on veut avoir une grande puissance de refroidissement, il faut répéter les processus 2-3 et 4-1 aussi rapidement que possible. On estime ici le temps qu'il faut pour opérer le processus 4-1 si le gaz est simplement en contact avec une paroi à la température T_1. On modélise le transfert thermique entre le gaz et la paroi par la loi : $P_Q = -A\kappa_g(T - T_1)/\ell$ où A est l'aire du contact entre les N moles du gaz à la température T et la paroi à la température T_1, κ_g la conductivité thermique du gaz (on suppose qu'il n'y a pas de convection) et ℓ une dimension caractéristique du cylindre contenant le gaz. Trouver sur les feuilles annexes une équation pour $\dot{T}(t)$ (qui implique une dépendance temporelle en forme d'exponentielle) et déterminer la constante de temps τ de ce transfert thermique en fonction des grandeurs physiques données.

   $\tau =$

6. (**0.5 point**) En plus de la température de la zone froide qui devient $T_1^{'} < T_1$, quel est le paramètre expérimental de la donnée qui change énormément quand on fait passer le gaz à travers la grille, et qui rend P_Q beaucoup plus grand ?

   Paramètre : ....

7. (**0.5 point**) Quel est le changement de température de la grille $T_3^{'} - T_3$ relatif à $T_3 - T_1$ quand le gaz froid passe à travers la grille chaude ? La chaleur spécifique de la grille est donnée par la loi $C_{solide} = 3N_sR$, où N_s est le nombre de mole de la substance avec laquelle la grille est faite. Pour le gaz, on a $C_V = cNR$.

   $$\frac{T_3^{'} - T_3}{T_3 - T_1} =$$

1. (**0.5 point**) Calculer le travail W_{cycle} effectué sur le système durant un cycle.

$$W_{cycle} = NR(T_3 - T_1) \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

2. (**0.5 point**) Calculer le transfert thermique Q_{12} effectué pendant l'isotherme à T_1, en fonction de V_1, V_2, T_1, T_3.

$$Q_{12} = NRT_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

3. (**0.5 point**) Calculer le changement d'entropie ΔS_{12} du gaz pendant l'isotherme à T_1.

$$\Delta S_{12} = NR \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

4. (**0.5 point**) Montrer que $Q_{23} = -Q_{41}$.

$$Q_{41} = \Delta U_{41} = cNR(T_1 - T_3) \qquad Q_{23} = \Delta U_{23} = cNR(T_3 - T_1)$$

5. (**1.0 point**) On a

$$cNR\dot{T} = -\frac{\kappa_g A}{\ell}(T - T_1) \Rightarrow \frac{dT}{T - T_1} = -\frac{\kappa_g A}{\ell cNR}\,dt$$

$$\tau = \frac{\ell cNR}{\kappa_g A}$$

6. (**0.5 point**) Quel est le paramètre qui change énormément quand on fait passer le gaz à travers la grille, et qui fait que P_Q est beaucoup plus grand.

   Paramètre : La longueur caractéristique ℓ. On peut penser également que la surface de contact A est plus grande pour une grille. Pour être précis, on pourrait dire que c'est le rapport ℓ/A qui devient beaucoup plus petit.

7. (**0.5 point**)

$$\frac{T_3' - T_3}{T_3 - T_1} = \frac{cN}{3N_s}$$

Physique avancée II – Examen Juin 2017 – Prof. J-Ph. Ansermet

Juin 2017 - 12h15-15h15

Nom :

Prénom :

N° Sciper :

B. Osmose de gaz (3/10 points)

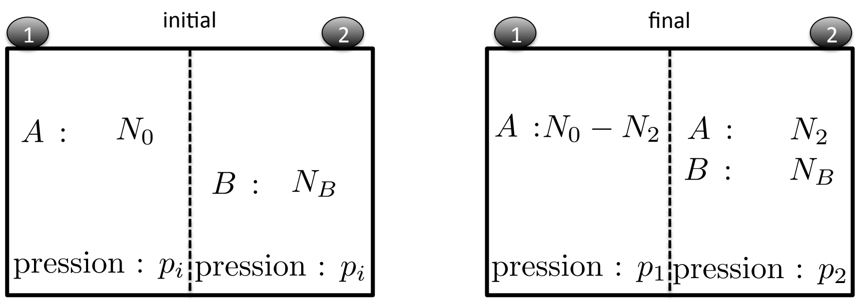
Un système isolé est constitué de deux sous-systèmes rigides, immobiles, de volumes V_1 et V_2, séparés par une paroi poreuse dont on admettra la propriété suivante : elle laisse passer l'hélium (He) mais pas l'oxygène (O_2). On utilisera l'indice A pour désigner l'hélium, et B pour l'oxygène. Le système entier est à l'équilibre thermique en tout temps. Chaque gaz peut être considéré comme un gaz parfait pour lequel on a les équations d'état habituelles :

$$pV = NRT \qquad U = cNRT$$

Le mélange des deux gaz obéit à la loi du mélange idéal :

$$\mu_A(T, p, c_A) = \mu_A(T, p) + RT\ln(c_A) \qquad \mu_B(T, p, c_B) = \mu_B(T, p) + RT\ln(c_B)$$

où $\mu_A(T, p)$ et $\mu_B(T, p)$ sont les potentiels chimiques des substances A, respectivement B, quand elles sont pures, c_A et c_B sont les concentrations de A et B du mélange. Initialement, on a N_0 moles d'hélium dans le sous-système 1, et N_B moles d'oxygène dans le sous-système 2. Les quantités d'hélium N_0 et N_B sont choisies de manière à ce que la pression initiale p_i soit la même dans les deux sous-systèmes. A tout moment, chaque sous-système est supposé homogène. On notera N_1 le nombre de mole d'hélium dans le sous-système 1, N_2 le nombre de moles d'hélium dans le sous-système 2.



Questions et réponses au verso !

1. (**0.5 point**) Pour tout gaz pur, déduire à partir de principes généraux une expression pour $\partial\mu(T,p)/\partial p$ en fonction de sa température T et sa pression p :

$$\frac{\partial\mu(T,p)}{\partial p} =$$

2. (**0.5 point**) Pour tout gaz pur, montrer que son potentiel chimique à température fixe dépend de la pression comme ci :

$$\mu(T,p_f) = \mu(T,p_i) + RT\ln\left(\frac{p_f}{p_i}\right)$$

....

3. (**0.5 point**) On note ici μ_1 le potentiel chimique de la substance A dans le sous-système 1, et μ_2 sa valeur dans le sous-system 2. Montrer par des développements rédigés sur les feuilles annexes que :

$$\dot{S}_1 + \dot{S}_2 = \frac{1}{T}\left(\dot{U}_1 + \dot{U}_2\right) - \frac{\mu_1}{T}\dot{N}_1 - \frac{\mu_2}{T}\dot{N}_2$$

4. (**0.5 point**) Expliquer comment déduire du résultat ci-dessus que $\mu_1 = \mu_2$ à l'équilibre :

....

....

5. (**1.0 point**) Utiliser la loi de mélange, la dépendance en pression du potentiel d'une substance pure et la condition d'équilibre $\mu_A(T,p_1) = \mu_A(T,p_2,c_A)$ pour obtenir une relation entre les pressions p_1 et p_2 quand l'équilibre des deux sous-systèmes est atteint.

....

Exprimer alors les pressions p_1 et p_2 ainsi que la concentration c_A en fonction de N_2 :

$p_1 =$ $\qquad$ $p_2 =$ $\qquad$ $c_A =$

En tirer p_1 et p_2 en fonction de la pression initiale. On prendra ici $V_1 = V_2$, ce qui implique $N_B = N_0$.

$p_1 =$ .... p_i $\qquad$ $p_2 =$ .... p_i

1. (**0.5 point**) Pour tout gaz pur, déduire à partir de principes généraux une expression pour $\partial\mu(T,p)/\partial p$ en fonction de sa température T et sa pression p : De $dG = -SdT + Vdp + \mu dN$ on tire la relaxation de Maxwell

$$\frac{\partial\mu(T,p)}{\partial p} = \frac{\partial V}{\partial N} = \frac{\partial(NRT/p)}{\partial N} = \frac{RT}{p}$$

2. (**0.5 point**) Pour tout gaz pur, montrer que son potentiel chimique à température fixe dépend de la pression comme ci :

$$\mu(T,p_f) = \mu(T,p_i) + RT\ln\left(\frac{p_f}{p_i}\right)$$

Il suffit d'intégrer le résultat ci-dessus :

$$d\mu = RT\frac{dp}{p} \Rightarrow \int_{p_i}^{p_f} d\mu = \int_{p_i}^{p_f} RT\frac{dp}{p} = RT\ln\left(\frac{p_f}{p_i}\right)$$

3. (**0.5 point**) On note ici μ_1 le potentiel chimique de la substance A dans le sous-système 1, et μ_B sa valeur dans le sous-system 2.

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= T\dot{S}_1 + \mu_1\dot{N}_1 \\ \dot{U}_2 &= T\dot{S}_2 + \mu_1\dot{N}_2 \end{aligned}$$

Il suffit alors de calculer $\dot{S}_1 + \dot{S}_2$.

4. (**0.5 point**)

La conservation de la quantité de matière implique $\dot{N}_1 = -\dot{N}_2$ et le premier principe implique $\dot{U}_1 = -\dot{U}_2$. Le deuxième principe implique que l'entropie du système est maximale à l'équilibre, donc $\partial(S_1+S_2)/\partial N_1 = 0$, ce qui implique l'égalité des potentiels chimiques $\mu_1 = \mu_2$.

5. (**1.0 point**)

L'égalité du potentiel chimique de A dans 1 et dans 2 implique,

$$c_A = \frac{p_1}{p_2}$$

Or on a :

$$c_A = \frac{N_2}{N_2+N_0} \qquad p_1 = \frac{(N_0-N_2)RT}{V} \qquad p_2 = \frac{(N_0+N_2)RT}{V}$$

Il suffit de résoudre. La solution est $N_2 = N_0/2$, ce qui donne, compte tenu de $N_0RT/V = p_i$:

$$p_1 = \frac{p_i}{2} \qquad p_2 = \frac{3p_i}{2}$$

Juin 2017 - 12h15-15h15

Nom : | | | | | | | | | | | | | | |

Prénom : | | | | | | | | | | | | | | |

N° Sciper : | | | | | |

C. Les "patterns" de Turing (3/10 points)

On porte notre attention sur les densités volumiques n_A et n_B de deux substances A et B qui sont présentes dans un milieu biologique. Ce milieu est capable de générer du A et du B par un processus caractérisés par les taux $\pi_A(n_A, n_B)$ et $\pi_B(n_A, n_B)$ de production de A et de B. Les substances A et B peuvent diffuser dans ce milieu. Les densités de courants $\boldsymbol{j}_A$ et $\boldsymbol{j}_B$ obéissent chacune à la loi de Fick :

$$\boldsymbol{j}_A = -D_A \boldsymbol{\nabla} n_A \qquad \boldsymbol{j}_B = -D_B \boldsymbol{\nabla} n_B$$

Ce système admet un état d'équilibre homogène aux densités n_A^0 et n_B^0. Cela veux dire que les taux de production de A et B sont tels que le système d'équations

$$\begin{aligned} \dot{n}_A &= \pi_A(n_A, n_B) \\ \dot{n}_B &= \pi_A(n_A, n_B) \end{aligned}$$

admet une solutions stationnaire ($\dot{n}_A = \dot{n}_B = 0$) aux densités volumiques n_A^0 et n_B^0. Un développement limité au premier ordre de $\pi_A(n_A, n_B)$ et $\pi_B(n_A, n_B)$ autour de n_A^0 et n_B^0 est écrit :

$$\begin{aligned} \pi_A &= a_{11}(n_A - n_A^0) + a_{12}(n_B - n_B^0) \\ \pi_B &= a_{21}(n_A - n_A^0) + a_{22}(n_B - n_B^0) \end{aligned}$$

On utilisera la notation $\Delta n_A = (n_A - n_A^0)$ et $\Delta n_B = (n_B - n_B^0)$. On admet que la matrice,

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

est inversible ($\det(M) \neq 0$). Les variations spatiales des densités volumiques, quand il y en a, sont fonction seulement de la coordonnée cartésienne x d'un axe de coordonnée Ox lié au milieu biologique. Ce milieux biologique n'est pas en expansion ($\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}$=0).

Questions et réponses au verso !

1. (**1.0 point**) Considérez une petite boîte en forme de disque d'aire S, d'épaisseur dx, d'axe parallèle à l'axe de coordonnée x. Etablir sur les feuilles annexes le bilan de la quantité de substance A dans cette boîte. Montrer alors qu'on a :

$$\dot{n}_A = D_A \frac{\partial^2 n_A}{\partial x^2} + \pi_A$$

....

2. (**1.0 point**) On suppose ici que le processus qui engendre A et B est une réaction chimique dont on connaît les coefficients stoechiométriques ν_A et ν_B et dont la vitesse de réaction est notée ω. La thermodynamique des processus irréversibles et la loi des mélanges idéaux fournit les résultats suivants :

$$\pi_A = \nu_A \, \omega \qquad \pi_B = \nu_B \, \omega \qquad \pi_S = \frac{\omega \mathcal{A}}{T} \qquad \mathcal{A} = \frac{-RT}{n} \left(\nu_A \, \Delta n_A + \nu_B \, \Delta n_B \right)$$

où ω est la vitesse de réaction, ν_A et ν_B les coefficients stoechiométriques de la réaction. Pourquoi doit-on supposer $\omega = L \, \mathcal{A}$ avec $L > 0$?

....

Donner les expressions des éléments de la matrice M qu'on peut déduire par cette approche :

$a_{11} =$ $\qquad\qquad$ $a_{12} = a_{21} =$ $\qquad\qquad$ $a_{22} =$

3. (**1.0 point**) Ecrire les équations d'évolution pour Δn_A et Δn_B en utilisant le développement limité de π_A et π_B exprimé avec les éléments de matrice a_{ij} de la donnée (pas les solutions de la question précédente) :

$\Delta \dot{n}_A =$

$\Delta \dot{n}_B =$

On suppose maintenant qu'à $t = 0$, l'état d'équilibre homogène est légèrement perturbé. On conduit l'analyse pour une perturbation sinusoidale, qu'on exprimera par des nombres complexes pour simplifier les calculs. Pour voir comment cette perturbation évolue dans le temps, on suppose une évolution exponentielle. Ainsi, on pose une solution aux équations ci-dessus de la forme :

$$\begin{pmatrix} \Delta n_A(x,t) \\ \Delta n_B(x,t) \end{pmatrix} = \exp\left(\lambda \, t\right) \, \exp\left(-ikx\right) \begin{pmatrix} a_A \\ a_B \end{pmatrix} \qquad (k \text{ réel})$$

Trouver les deux valeurs de λ pour lesquelles on a des solutions non-triviales, c'est-à-dire $a_A \neq 0$ et $a_B \neq 0$. Regroupez certains termes de votre calcul sous une constante (par exemple, posez : $D = a_{11} + a_{22} - k^2(D_A + D_B)$).

$\lambda_1 =$ $\qquad\qquad$ $\lambda_2 =$

1. (**1.0 point**) Le dessin doit faire voir le courant entrant et sortant, en x et $x + dx$, impliquant que le bilan de substance A dans la boîte s'écrit :

$$\dot{n}_A = -\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j}_A + \pi_A$$

Avec la loi de Fick, on a $D_A \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} n_A$, ce qui donne pour ce problème à une dimension :

$$\dot{n}_A = D_A \frac{\partial^2 n_A}{\partial x^2} + \pi_A$$

2. (**1.0 point**) On doit supposer $\omega_a = L\mathcal{A}$ avec $L > 0$ pour que π_S soit assurément positif. Il suffit de regrouper les résultats annoncés :

$$a_{11} = -L\frac{RT}{n}\nu_A^2 \qquad a_{12} = a_{21} = -L\frac{RT}{n}\nu_A\nu_B \qquad a_{22} = -L\frac{RT}{n}\nu_B^2$$

3. (**1.0 point**) Ecrire les équations d'évolution pour Δn_A et Δn_B en utilisant le développement limité pour $\pi_A(n_A, n_B)$ et $\pi_B(n_A, n_B)$:

$$\begin{aligned} \dot{n}_A &= D_A \frac{\partial^2 n_A}{\partial x^2} + a_{11}\Delta n_A + a_{12}\Delta n_B \\ \dot{n}_B &= D_B \frac{\partial^2 n_A}{\partial x^2} + a_{21}\Delta n_A + a_{22}\Delta n_B \end{aligned}$$

Les deux valeurs de λ pour lesquelles on a des solutions non-triviales sont :

$$\lambda_1 = D + \sqrt{D^2 + a_{12}a_{21}} \qquad \lambda_2 = D - \sqrt{D^2 + a_{12}a_{21}}$$

avec $D = a_{11} + a_{22} - k^2(D_a + D_B)$. Les deux solutions impliquent une croissance exponentielle (formation d'un "pattern") si $a_{12}a_{21} < 0$ et $D > 0$, ce qui impose une condition sur k, a_{11} et a_{22}.